

**Nombre del Proyecto:**

**Software didáctico para la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.**

**Autor:**

**Angel P. Villota C.**

**Objetivo:**

Desarrollar un software de carácter didáctico, que permita graficar los campos de direcciones (solución general) y trayectorias de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden (soluciones particulares).

**Análisis y justificación del proyecto:**

Cuando se enseñan los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se vuelve difícil por decir lo menos y en ocasiones imposible, dibujar la trayectoria de la solución particular, o al menos el campo de direcciones para visualizar las trayectorias de la solución general de una ecuación diferencial.

La elaboración de un software que grafique los campos de direcciones y trayectorias de ecuaciones diferenciales de primer orden, simplificaría esta problemática.

Además la solución general de una ecuación diferencial que es una familia de funciones, y la solución particular de un problema de valor inicial que es una función de la familia de funciones que cumple con las condiciones iniciales, no siempre es posible determinarlas analíticamente utilizando los métodos conocidos de solución de ecuaciones diferenciales. En realidad del conjunto infinito de ecuaciones diferenciales solo un pequeño subconjunto de este conjunto pueden resolverse analíticamente.

Es decir no toda ecuación diferencial tiene una solución real, y aún si la tiene, no siempre podemos expresarla en forma explícita o implícita como una combinación finita de funciones elementales. En muchos casos, particularmente en la solución de ecuaciones diferenciales no lineales tendremos que contentarnos con una solución numérica aproximada; y para esto tenemos que usar métodos numéricos aproximados como Euler, Euler mejorado, Range Kutta implementados en un software.

El tener un software de características específicas como recurso didáctico en el aula para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias, va a posibilitar la visualización de los campos de direcciones (familia de soluciones o solución general) y de las trayectorias de soluciones (soluciones particulares) de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y poder hacer un análisis de dichas soluciones, sea este numérico es decir cuantitativo, o cualitativo, de problemas prácticos en campos de la ingeniería o tecnología, como la biotecnología, la agroindustria, la ecología, la dinámica de poblaciones etc.

El contar con paquetes extranjeros que por un lado son de carácter general, no obstaculiza el desarrollo de este software, porque a parte de ser muy amigable es decir de fácil uso; es

especifico para incluirlo en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y pues también, siempre he pensado y estoy convencido de que la única manera de salir del subdesarrollo es creando nuestras propias cosas, creando nuestra propia tecnología y desarrollando nuestra propia ciencia.

### **Resumen:**

El software de nombre EDO1 grafica el campo de direcciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en dos subconjuntos de  $\mathbf{R}^2$ . El campo de direcciones sirve para visualizar las trayectorias de la familia de curvas que representa la solución general de una ecuación diferencial.

Además dibuja la solución particular de un problema de valor inicial, mediante los métodos numéricos de Euler y Euler mejorado, determinando además el valor de la imagen de dicha solución en algún punto  $x$  dado.

Entre los algoritmos desarrollados de manera inédita, e implementados en lenguaje C puro con 2500 líneas de programación, constan analizadores sintácticos, semánticos y un evaluador de expresiones matemáticas que permiten ingresar la ecuación diferencial desde el teclado como una expresión matemática.

La aplicación del software, no solo está en el campo de las ecuaciones diferenciales, sino también se puede usar para resolver integrales definidas, transformando la integral definida a un problema de valor inicial. Así como también el software se puede utilizar para resolver cualquier ecuación algébrica polinómica, racional, irracional y exponencial.

### **Cap. 1 INTRODUCCION.**

La solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciones, y la solución particular de un problema de valor inicial es una función de la familia de funciones que cumple con las condiciones iniciales.

No toda ecuación diferencial tiene una solución real, y aún si la tiene, no siempre podemos expresarla en forma explícita o implícita como una combinación finita de funciones elementales. En muchos casos, particularmente en la solución de ecuaciones diferenciales no lineales tendremos que contentarnos con una solución numérica aproximada.

Centraremos nuestra atención en la solución numérica aproximada de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma  $y'(x) = f(x, y(x))$ , que en adelante notaremos  $y'(x) = f(x, y)$ . El software grafica el campo de direcciones y la solución particular a partir de un punto inicial  $(x_0, y_0)$  de cualquier ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma  $y'(x) = f(x, y)$ , donde  $f(x, y)$  puede ser cualquier función algébrica: polinómica, racional, irracional o exponencial, ingresando la función desde el teclado de manera interactiva con el software.

El obtener el gráfico del campo de direcciones de una ecuación diferencial nos da una idea de las trayectorias o familia de funciones solución de la ecuación diferencial, es decir nos da una idea de la solución general. El hacerlo manualmente, resulta tedioso y largo; con el software que a continuación presentamos, nos permitirá observar el campo de direcciones en dos subconjuntos del plano cartesiano a la vez, y podremos interactuar con el software para cambiar las veces que se quiera los extremos del subconjunto del plano cartesiano.

El gráfico de la solución numérica a partir de un punto inicial  $(x_0, y_0)$  representa la solución particular de un problema de valor inicial, esto es más significativo que el campo de direcciones, puesto que encontrada la solución particular, se puede determinar el valor

de la imagen  $y$  para cualquier valor de  $x$ . De la misma manera que antes se puede interactuar con el software para cambiar el punto inicial, así como también el valor de  $x$  en donde se quiere aproximar el valor de la imagen, tanto para el método de Euler como para el de Euler Mejorado.

En los restantes se ilustra con ejemplos, los campos de direcciones, y la solución numérica de ecuaciones diferenciales con los métodos numéricos de Euler y Euler utilizando el software desarrollado.

Adicionalmente como anexo se incluyen dos ejemplos ilustrando el uso del software para resolver integrales definidas y ecuaciones algebraicas polinómicas, racionales e irracionales

## Cap. 2 CAMPO DE DIRECCIONES.

Como se mencionó anteriormente, el campo de direcciones nos da la opción de tener una idea de la solución general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma  $y'(x) = f(x,y)$ .

Para obtener el campo de direcciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la forma  $y'(x) = f(x,y)$  se trazan segmentos lineales cortos, en puntos  $(x,y)$  del plano cartesiano  $\mathbf{R}^2$ , con una pendiente igual al valor  $f(x,y)$ ; puesto que el valor de  $f(x,y)$  representa la derivada de la curva solución en el punto  $(x,y)$ , es decir es la pendiente de la recta tangente trazada a la curva solución en ese punto.

Al conjunto de todos los segmentos lineales cortos trazados en un subconjunto de  $\mathbf{R}^2$ , se denomina **campo de direcciones**

A continuación con un ejemplo, se ilustra el uso del software para dibujar el campo de direcciones de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

También se determina la solución analítica o familia de soluciones con el fin de comparar la solución general o familia de soluciones con la gráfica del respectivo campo de direcciones.

**Ejemplo 1.** Resolver analíticamente y dibujar el campo de direcciones de

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$$

**Solución.** La ecuación diferencial es de variables separables, y se puede escribir como

$$\frac{dy}{y^2 - 9} = dx$$

Usando fracciones parciales en el primer miembro se tiene,

$$\left( \frac{\frac{1}{6}}{y-3} - \frac{\frac{1}{6}}{y+3} \right) dy = dx$$

e integrando tenemos,

$$\frac{1}{6} \ln \left| \frac{y-3}{y+3} \right| = x + c$$

de donde,

$$\left| \frac{y-3}{y+3} \right| = e^{6x+6c}$$

finalmente, reemplazando  $k = e^{6c}$  y despejando  $y$ , se tiene,

$$y = 3 \frac{1 + ke^{6x}}{1 - ke^{6x}}$$

Tratar de imaginar la forma de algunas curvas de la familia de soluciones de la solución general anterior, por decir lo menos parece difícil, sin embargo utilizando el software podemos obtener el campo de direcciones de la ecuación diferencial en dos subconjuntos distintos de  $\mathbf{R}^2$ . En la Figura 2.1, se puede apreciar la forma de algunas curvas de la familia de soluciones.

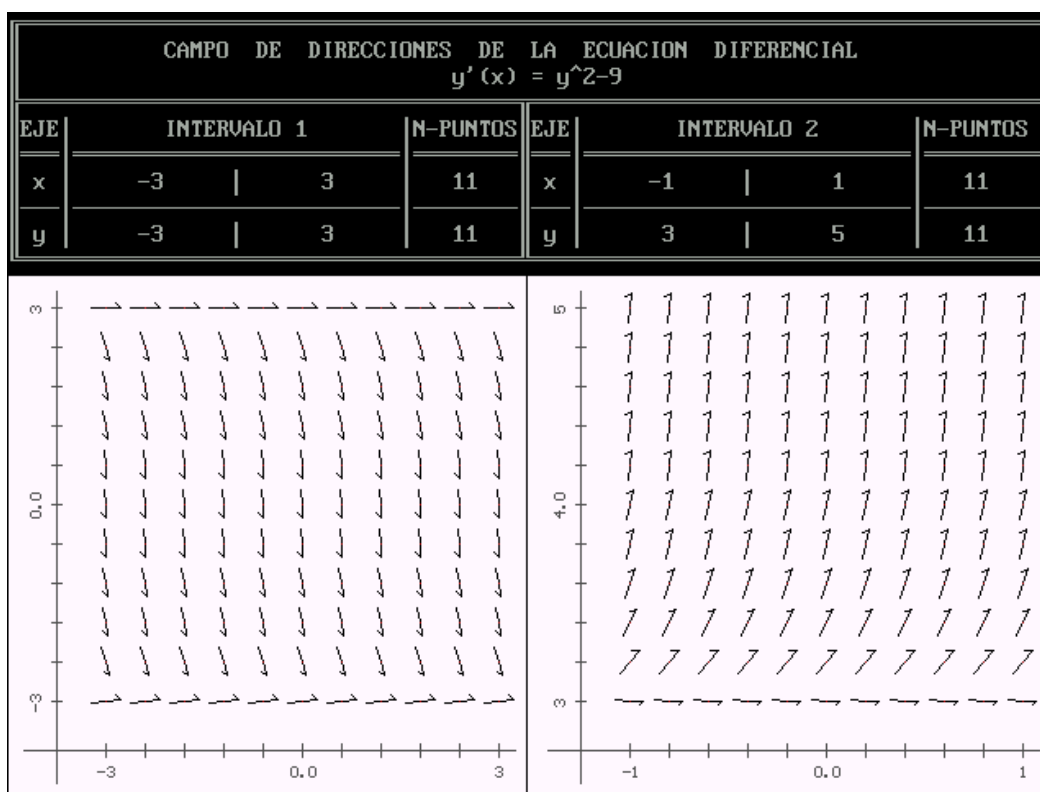


Figura 1. Campo de direcciones de la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$

### Cap. 3 SOLUCIÓN PARTICULAR DE UNA ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMER

Utilizando los métodos numéricos de Euler y Euler mejorado, se desarrolló un software capaz de graficar la solución particular de una ecuación diferencial a partir de un punto inicial  $(x_0, y_0)$ , y determinar el valor de la imagen de dicha solución particular, para un valor de  $x$  dado.

Con un ejemplo se ilustra el uso del software para graficar la solución particular, y además compararla determinando analíticamente la solución particular de la ecuación diferencial cuya solución general se encontró en el capítulo anterior.

**Ejemplo 2.** Determine y grafique la solución particular de

Resolver:  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 9$  .

Sujeta a:  $y(0) = 1$  .

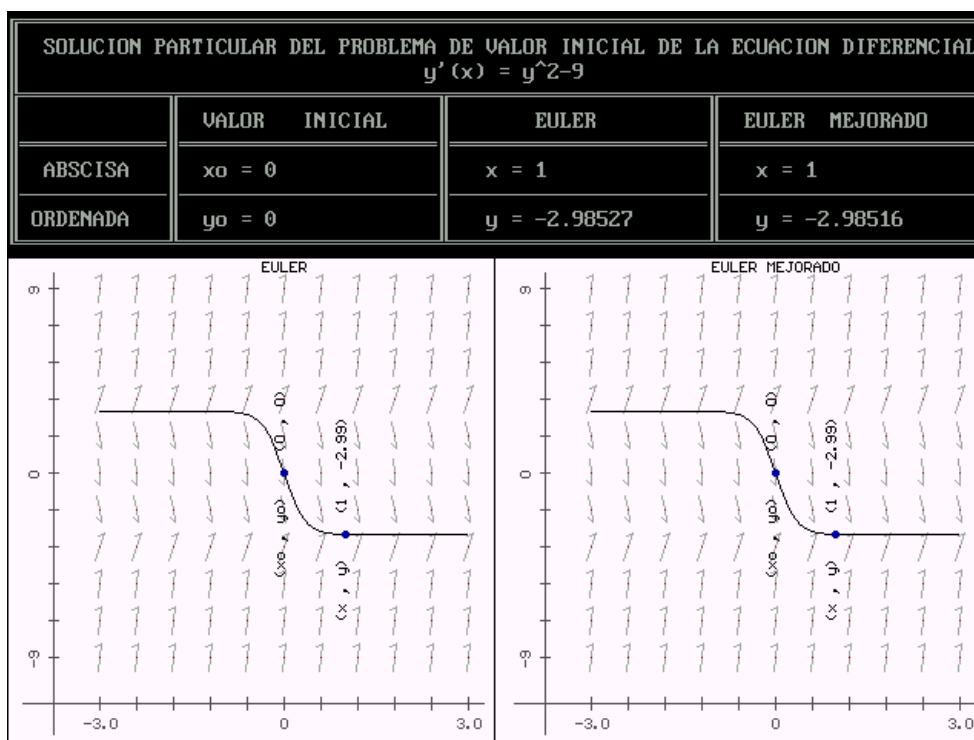
**Solución.** Del ejemplo 1 en el Capítulo 2, se tiene que la solución general es

$$y(x) = 3 \left( \frac{1 + ke^{6x}}{1 - ke^{6x}} \right)$$

Pero  $y(0) = 1$ , por lo tanto,  $y = 3 \frac{1 + ke^{6x}}{1 - ke^{6x}}$ , de donde  $k = 1$ , y por lo tanto se tiene que la solución particular es

$$y(x) = 3 \left( \frac{1 - e^{6x}}{1 + e^{6x}} \right)$$

Para  $x = 1$ ,  $y(1) = 3 \left( \frac{1 - e^6}{1 + e^6} \right)$  cuyo valor decimal aproximado es  $y(1) = 2.985164261$ .



**Figura 2. Solución particular y valor de la imagen en  $x=1$**

En la Figura 2 se observa que para Euler  $y(1) = -2.985267$  y para Euler Mejorado  $y(1) = -2.985164$ , que comparando con la solución analítica  $y(1) = 3 \left( \frac{1 - e^6}{1 + e^6} \right) \approx 2.985164261$ , se aprecia que la aproximación con Euler Mejorado al sexto decimal, por redondeo, no hay diferencia con la solución analítica.

También se aprecia en la Figura 2, que la gráfica de la solución particular que pasa por el punto  $(0,0)$ , tiene un comportamiento asintótico cuyas asíntotas son  $y = k$  para algún  $k \in [2.7, 3.6]$  y para algún  $k \in [-3.6, -2.7]$ ; esto solo observando el gráfico de acuerdo a la escala y valores que están en la Figura 2.

#### Cap4. ANEXOS

##### 5.1. Solución de una integral definida como un problema de valor inicial

Para calcular  $I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$

Resolvemos el siguiente problema de valor inicial

Resolver:  $y'(x) = f(x)$  sujeta a:  $y(x_0) = 0$  ;

Demuestre que  $I = y(x_1)$

**Demostración:** La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt + c$$

Pero  $y'(x_0)=0$ , por lo tanto  $0 = \int_{x_0}^{x_0} f(t) dt + c$ , de donde

$c=0$  y por lo tanto,  $y(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$  que es la solución particular del problema de valor inicial.

Calculando  $y(x_1)$  se tiene que  $y(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$  y como

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx, \text{ entonces } I = y(x_1)$$

**Ejemplo:** Determinar la longitud de curva en el intervalo [1,2] de  $y(x) = e^x$

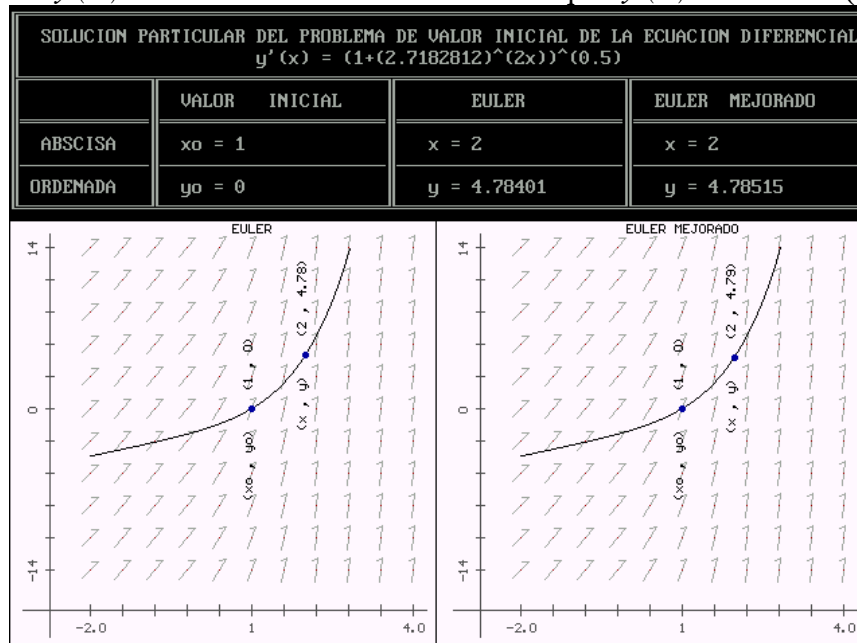
Como  $L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$  se tiene que

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+e^{2x}} dx$$

Transformando el problema de integral definida a un problema de valor inicial se tiene:

Resolver:  $y'(x) = \sqrt{1+e^{2x}}$  sujeta a:  $y(1) = 0$ .

Entonces  $L = y(2)$ . Utilizando el software se tiene que  $y(2) = 4.78515$  (ver figura 3)



**Figura 3. Solución particular**

**Determinemos ahora el valor de la integral definida de manera analítica**

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+e^{2x}} dx$$

Sea  $e^x = \operatorname{tg}(\theta)$ , entonces  $e^x dx = \sec^2(\theta) d\theta$

De donde,  $dx = \frac{\sec^2 \theta}{\operatorname{tg}(\theta)} d\theta$  que reemplazando en la integral se tiene

$$I = \int \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\theta)}}{\operatorname{tg}(\theta)} \sec^2(\theta) d\theta, \text{ de donde}$$

$$I = \int \frac{\sec^3(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} d\theta, \text{ que multiplicando numerador y denominador por } \operatorname{tg}(\theta)$$

la integral se transforma en  $I = \int \frac{\sec^2(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta)} \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$  y como

$$\operatorname{tg}^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1 \quad \text{se tiene que} \quad I = \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^2(\theta) - 1} \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$$

en donde, reemplazando  $u = \sec(\theta)$  y  $du = \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) d\theta$ , la integral se transforma

$$\text{en } I = \int \frac{u^2}{u^2 - 1} du, \text{ y aplicando fracciones parciales tenemos que}$$

$$I = \int \left( 1 + \frac{1}{u^2 - 1} \right) du = \int \left( 1 + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1} \right) du, \text{ de donde}$$

$$I = u + \frac{1}{2} \ln|u-1| - \frac{1}{2} \ln|u+1| + c$$

$$I = u + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + c, \text{ como } u = \sec(\theta) \text{ se tiene que}$$

$$I = \sec(\theta) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sec(\theta) - 1}{\sec(\theta) + 1} \right|$$

pero  $\operatorname{tg}(\theta) = e^x$  de donde  $\sec(\theta) = \sqrt{1 + e^{2x}}$  que al reemplazar en la integral,

finalmente se tiene:  $I = \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1}}$ , de donde la longitud de curva es

$$L = \left[ \sqrt{1 + e^{2x}} + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1}} \right]_1^2, \text{ y evaluando se tiene,}$$

$$L = \sqrt{1 + e^4} + \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 + e^4} - 1}{\sqrt{1 + e^4} + 1}} - \sqrt{1 + e^2} - \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1}} \text{ de donde,}$$

$$L \approx 4.785154089$$

Comparando el valor calculado analíticamente con el valor calculado por el software por redondeo a la quinta cifra decimal, prácticamente son iguales.

## 5.2. Solución de una ecuación algebraica como un problema de valor inicial

**Resolver la ecuación**  $g(x) = 0$

**Solución:**

Sea la función  $y(x) = g(x)$  tal que  $y(a) = b$ .

Derivando la función se tiene que

$y'(x) = g'(x)$  y sea  $g'(x) = f(x)$ , tenemos que

$y'(x) = f(x)$  tal que  $y(a) = b$

El planteamiento anterior es un problema de valor inicial en donde  $y'(x) = f(x)$  es la ecuación diferencial y  $y(a) = b$  es la condición inicial.

Determinemos el problema de valor inicial de la función inversa de  $y(x)$ .

Resolver:  $x'(y) = \frac{1}{f(x)}$  sujeta a:  $x(b) = a$ , y calcular  $x(0)$ . Es decir voy

a calcular el valor de  $x$  cuando  $y = 0$ , por lo tanto el valor  $x(0)$  es la solución de la

ecuación  $y(x)=0$ , y como  $y(x)=g(x)$  entonces, el valor  $x(0)$  es la solución de la ecuación  $g(x)=0$ .

Para resolver el problema de valor inicial utilizando el software intercambiamos las variables  $x$  con  $y$ , y se tiene,

Resolver:  $y'(x)=\frac{1}{f(y)}$  sujeta a:  $y(b)=a$ , y calcular  $y(0)$

**Ejemplo:** Resolver  $2+x^2-e^{x+1}=0$

**Solución:** Sea  $y(x)=2+x^2-e^{x+1}$ , plantemos un problema de valor inicial, derivando  $y(x)$  y calculando la imagen en un punto dado, por ejemplo en  $x=-1$ .

Y se tiene:  $y'(x)=2x-e^{x+1}$ ,  $y(-1)=2+(-1)^2-e^{-1+1}=2+1-1=2$

Por lo tanto el problema de valor inicial queda de la siguiente manera.

Resolver:  $y'(x)=2x-e^{x+1}$ , sujeta a:  $y(-1)=2$

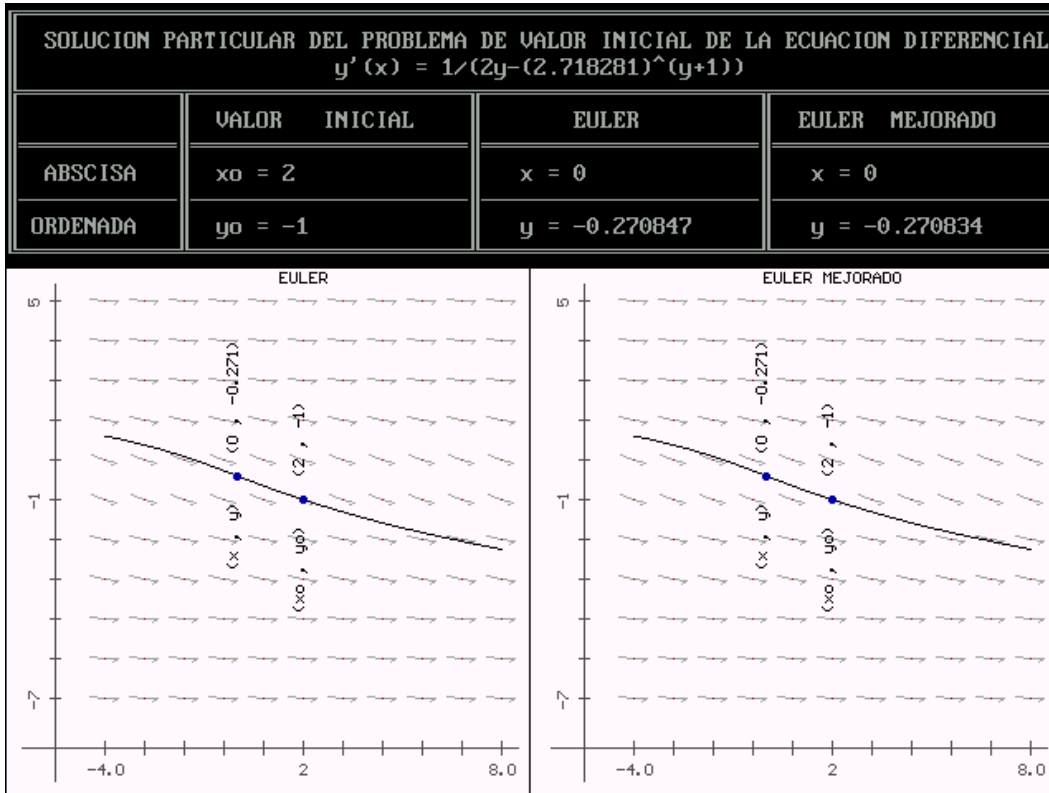
Transformamos el problema aun problema de valor inicial de la función inversa, y se tiene:

Resolver:  $x'(y)=\frac{1}{2x-e^{x+1}}$  sujeta a:  $x(2)=-1$ , y calcular  $x(0)$

Finalmente intercambiamos las variables  $x$  y  $y$ , con lo cual tenemos:

Resolver:  $y'(x)=\frac{1}{2y-e^{y+1}}$  sujeta a:  $y(2)=-1$ , y calcular  $y(0)$

Utilizando el software EDO1 (ver figura 4) el valor de  $y(0)=-0.270834$ , que al reemplazarse en  $y(x)=2+x^2-e^{x+1}$ , se tiene que  $y(-0.270834)=3.4365 \times 10^{-7}$ , por lo tanto  $x=-0.270834$  es una raíz de la ecuación  $2+x^2-e^{x+1}=0$ .



**Figura 4. Solución particular**

**Conclusiones:**

El presente trabajo, creo es un intento de mostrar alternativas en la enseñanza superior de las matemáticas, así como también ver que si es posible desarrollar software con características similares y hasta mejoradas de los paquetes extranjeros; y ser propietarios del conocimiento de esos algoritmos, lo que nos permite seguir desarrollando más herramientas en base a este conocimiento

El avance tecnológico, la automatización, las herramientas computacionales hoy en día son parte de nuestro convivir cotidiano, por lo tanto una educación de calidad, debe incluir estos aspectos en su currículo.

**Referencias:**

1. Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones (1986)
2. Ecuaciones Diferenciales Elementales y Problemas con Condiciones en la Frontera (1995)
3. Solving Ordinary Differential Equations I (1987)
4. Aplique Turbo C++ (1991)
5. Manual Borland C++ 4.0 (1994)

- Dennis G. Zill  
C.H. Edwards, Jr  
y David E. Penney  
E. Hairer S.P. Norsett  
G. Wanner  
Herbert Schildt  
Chris H. Pappas

II CONGRESO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA ESPE - 2007  
30-31 DE MAYO Y 1 DE JUNIO DE 2007

## BIOGRAFÍAS

### TEMA

Desarrollo de software científico, aplicación a la solución numérica de ecuaciones

Diferenciales ordinarias de primer orden.

### NOMBRE

Ángel Patricio Villota Cadena

### ESTUDIOS

PREGRADO: Ingeniero Civil

POSTGRADO: Magíster en Docencia Matemática

Magíster en Ciencias de la Computación

### EXPERIENCIA LABORAL / PUBLICACIONES DESTACADAS

Profesor Principal a tiempo completo de la Escuela Politécnica Nacional. Desde

1985 hasta la presente.

Profesor Principal hora clase de la Escuela Politécnica del Ejercito. Desde 1983

Hasta la presente.