Método para encontrar puntos críticos de una función

J. García
Departamento de Ciencias exactas, Escuela Politécnica del Ejército, Sangolquí, Ecuador

RESUMEN:

Las primeras ideas de la existencia de valores máximos y mínimos de una función en un intervalo están contenidas en el segundo teorema de Weierstrass, el cual afirma que una función continua en un intervalo cerrado [a; b] alcanza su valor máximo y su valor mínimo en dicho intervalo. Sin embargo, este teorema no precisa en que puntos del intervalo alcanza la función su valor máximo y su valor mínimo, lo cual impide determinar estos puntos. Para solventar este inconveniente, pongo a disposición el siguiente trabajo, que facilita el cálculo de los puntos de máximo, mínimo y de inflexión.

OBJETIVOS:

Dotar a los estudiantes de una nueva herramienta para el cálculo de puntos máximos, mínimos y de inflexión de una función, sin la utilización del concepto de derivada.

TEOREMA:

Sea $f(x)$ una función continua y definida en el intervalo abierto (a; b), entonces existe un punto ε en (a; b) tal que cumple lo siguiente:

a.- El punto ε alcanza un máximo relativo, si existe un entorno del punto ε en el que para todos sus puntos se verifica la desigualdad $f(x_{1,2}) \leq f(\varepsilon)$.

b.- El punto ε alcanza un mínimo relativo, si existe un entorno del punto ε en el que para todos sus puntos se verifica la desigualdad $f(x_{1,2}) \geq f(\varepsilon)$.

c.- El punto ε alcanza la inflexión de la función, si existe un entorno del punto ε en el que para todos sus puntos se verifica la desigualdad $f(x_1) \leq f(\varepsilon) \leq f(x_2)$ o $f(x_2) \leq f(\varepsilon) \leq f(x_1)$.Es decir, la grafica de la función tiene direcciones diferentes de convexidad a la izquierda y a la derecha del punto ε.

METODOLOGIA:

Para la aplicación del método y poder determinar los puntos de máximos y mínimos, hacemos $f(x) = f(\varepsilon)$ encontrando de esta manera los valores ε, a continuación hacemos el análisis particular de cada uno de estos valores, para determinar si se trata de un máximo o mínimo. Si con los valores de ε se verifica la desigualdad $f(x_{1,2}) \leq f(\varepsilon)$, entonces hemos determinado los puntos de máximo. Si por el contrario, con los valores de ε se verifica la desigualdad $f(x_{1,2}) \geq f(\varepsilon)$, entonces hemos determinado los puntos de mínimo. Esto lo podemos apreciar en las figuras 1 y 2.

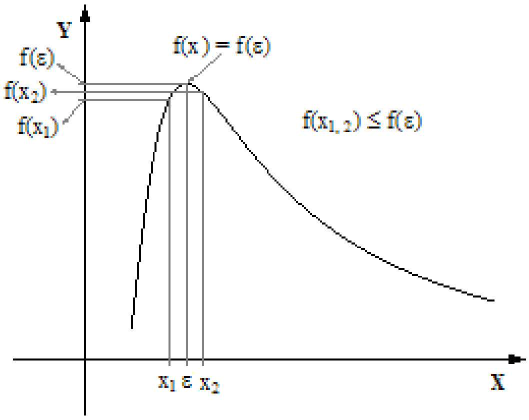


Figura 1. Punto de máximo

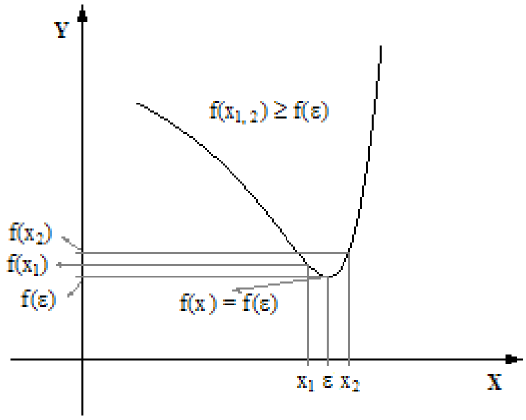


Figura 2. Punto de mínimo

Para determinar los puntos de inflexión, hacemos f(ε) = f(k), encontrando los valores de k y a continuación realizamos el análisis para cada valor hallado. Si para los valores de k, se verifica la desigualdad $f(x_1) \leq f(\varepsilon) \leq f(x_2)$ o $f(x_2) \leq f(\varepsilon) \leq f(x_1)$, entonces estamos ante puntos de inflexión. Es decir, la grafica de la función tiene direcciones diferentes de convexidad a la izquierda y a la derecha de cada valor de k. De igual forma, esto lo podemos visualizar en las figuras 3 y 4.

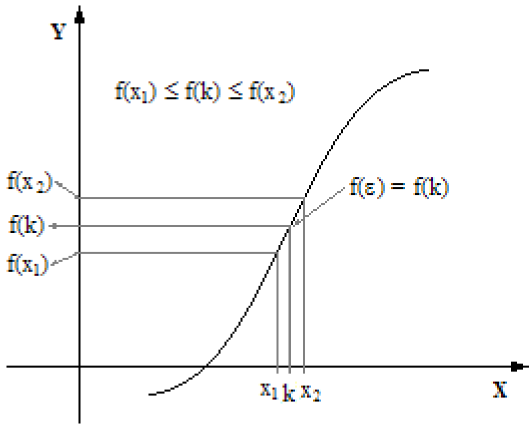


Figura 3. Punto de inflexión

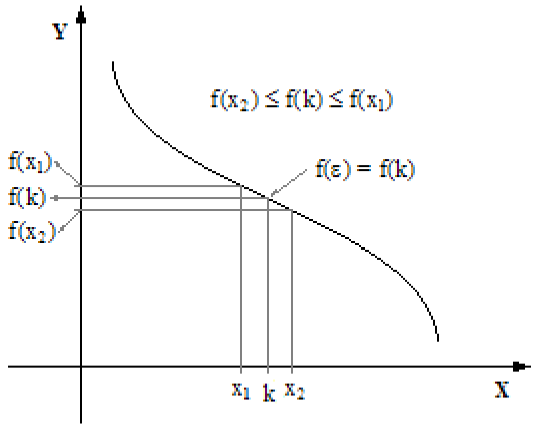


Figura 4. Punto de inflexión

CONCLUSIONES:

En cualquier función o problema real el teorema es aplicable, logrando el objetivo propuesto.

RESULTADOS:

Se presentan dos ejemplos, en los que se puede verificar y comprobar la veracidad y aplicabilidad a problemas del mundo real de la ingeniería, de este método.

EJEMPLO 1:

Dada la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$, determine los puntos de máximo, mínimo y de inflexión.

SOLUCION

Para encontrar los puntos de máximos y mínimos, hacemos f(x) = f(ε):

$$\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon^2+1} \;\Rightarrow\; \frac{(\varepsilon-x)[x(\varepsilon-1)-\varepsilon-1]}{(x^2+1)(\varepsilon^2+1)}=0 \;\Rightarrow\; \frac{\varepsilon^2-2\varepsilon-1}{(\varepsilon^2+1)^2}=0$$

$$\begin{cases}\varepsilon-x=0\\ \varepsilon^2-2\varepsilon-1=0\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\varepsilon_1=1-\sqrt{2}\\ \varepsilon_2=1+\sqrt{2}\end{cases}.$$

Siendo $P\left(1-\sqrt{2},-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ el punto de mínimo y $Q\left(1+\sqrt{2},-\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ el punto de máximo.

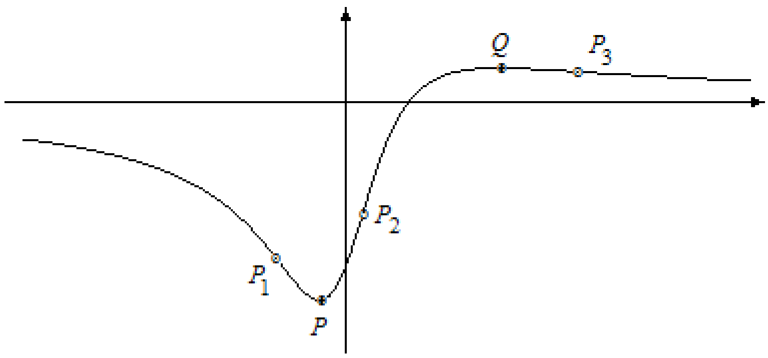
Para determinar los puntos de inflexión, hacemos f(ε) = f(k):

$$\frac{\varepsilon^2-2\varepsilon-1}{(\varepsilon^2+1)^2}=\frac{k^2-2k-1}{(k^2+1)^2}$$

$$\frac{(k-\varepsilon)[\varepsilon^2(\varepsilon+k)(k^2-2k-1)-\varepsilon(2k^3+k^2+4k+3)-k^3-3k+2]}{(\varepsilon^2+1)^2(k^2+1)^2}=0$$

$$\begin{cases}k-\varepsilon=0\\ k^3-3k^2-3k+1=0\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases}k_1=-1\\ k_2=2-\sqrt{3}\\ k_3=2+\sqrt{3}\end{cases}.$$

Siendo $P_1(-1,-1)$, $P_2\left(2-\sqrt{3},-\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\right)$ y $P_3\left(2+\sqrt{3},-\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)$ los puntos de inflexión.



EJEMPLO 2:

Un observador se encuentra frente a un cuadro colgado de una pared vertical. El borde inferior del cuadro está situado a una distancia a sobre el nivel de los ojos del observador, el borde superior, a una distancia b. ¿A qué distancia de la pared debe hallarse el observador para que el ángulo bajo el que ve el cuadro sea el máximo?

SOLUCION

Del triángulo pequeño tenemos

$$Tan\beta=\frac{a}{x}$$

Del triángulo grande tenemos

$$Tan(\alpha+\beta)=\frac{b}{x}$$

Descomponemos esta identidad y obtenemos

$$\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=\frac{b}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{Tan\alpha+\frac{a}{x}}{1-\frac{a}{x}Tan\alpha}=\frac{b}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{xTan\alpha+a}{x-aTan\alpha}=\frac{b}{x} \quad\Rightarrow\quad (x^2+ab)Tan\alpha=(b-a)x$$

$$Tan\alpha=\frac{(b-a)x}{x^2+ab} \quad\Rightarrow\quad \alpha(x)=ArcTan\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$$

Para obtener x, la distancia del observador a la pared, hacemos $\alpha(x)=\alpha(\varepsilon)$:

$$ArcTan\frac{(b-a)x}{x^2+ab}=ArcTan\frac{(b-a)\varepsilon}{\varepsilon^2+ab} \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{x^2+ab}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+ab} \quad\Rightarrow\quad x(\varepsilon^2+ab)=\varepsilon(x^2+ab)$$

$$ab(x-\varepsilon)-\varepsilon x(x-\varepsilon)=0 \quad\Rightarrow\quad (x-\varepsilon)(ab-\varepsilon x)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=\varepsilon \\ ab-\varepsilon^2=0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon=\sqrt{ab}$$

Por tanto la distancia a la que debe estar el observador de la pared es $x=\sqrt{ab}$.